Практикум из Математике 2 – 27. 5. 2022.

Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Име и презиме:	Број индекса:

1.	2.	3.	4.	5.	Сума 1

Сума 1	Сума 2	Сума 3	Сума

Тест траје 45 минута. Сваки задатак вреди 1 бод.

1. Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Одредити све вредности параметра $b \in \mathbb{R}$ за које матрица

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & b & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

има најмањи ранг.

3. Нека је A произвољна реална квадратна матрица реда n. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) $\operatorname{rang} A^{\mathrm{T}} < n \Rightarrow \det A = 0$;

(б) $\operatorname{rang} A^{\mathrm{T}} = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$;

(в) $\operatorname{rang} A = 0 \Leftrightarrow \det A^{\mathrm{T}} = 0$;

(г) ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно.

4. У зависности од вредности параметра $c \in \mathbb{R}$, одредити ранг матрице

$$C = \begin{bmatrix} 2 & c & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) за све матрице A и B истог реда важи $\operatorname{rang}(A+B) = \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$;

(б) заменом места двема колонама матрице, њен ранг се не мења;

(в) за произвољну матрицу C важи $5 \operatorname{rang} C = \operatorname{rang}(5\,C)$;

(г) ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно.

6.	7.	8.	9.	10.	Сума 2

6. Одредити сопствене вредности матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

7. Одредити минимални полином матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

8. Одредити вредност параметра $a \in \mathbb{R}$ тако да збир сопствених вредности матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 0 & a-3 \\ -4 & a-3 & a \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

буде једнак 10.

9. Одредити све вредности параметра $b \in \mathbb{R}$ тако да једна сопствена вредност матрице

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ -b & 7 & b \end{bmatrix}$$

буде једнака 4.

10. Одредити сопствене векторе матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

11.	12.	13.	14.	15.	Сума 3

11. Написати једначину равни α која садржи тачку $A(1,-1,3)$ и нормална је на вектор $\overrightarrow{BC}$, где је $B(2,1,3)$ и $C(2,0,3)$.

12. Заокружити слова испред тврђења која важе за све $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, векторски производ $\times$ и скаларни производ $\circ$:

(а) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ и $\vec{b}$ су ортогонални;

(б) $\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$ и $\vec{b}$ су колинеарни;

(в) $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\right] = 0$;

(г) ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно.

13. Дати су вектори $\vec{c} = (1,2,3)$ и $\vec{d} = (-2,1,0)$. Израчунати:

(а) $\vec{c} \circ \vec{d}$;

(б) $\angle\left(\vec{c}, \vec{d}\right)$;

(в) $\vec{c} \times \vec{d}$.

14. У $\mathbb{R}^3$ дате су права $p : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z-3}{3},\ y = 5$, и раван $\beta : 2x + 3z + 5 = 0$. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) права p има тачно једну заједничку тачку са равни β;

(б) права p је паралелна са равни β;

(в) права p је нормална на раван β;

(г) ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно.

15. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) вектор $(1,0,0)$ је нормалан на раван yOz;

(б) вектор нормале равни yOz је $(0,1,1)$;

(в) оса Ox је паралелна са равни $x = 0$;

(г) ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно.

– Решења –

1. Ако врсте дате матрице A посматрамо као векторе $\overrightarrow{v_1}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{v_2}=(2,4,6)$, $\overrightarrow{v_3}=(3,6,9)$ и $\overrightarrow{v_4}=(-1,2,3)$, можемо приметити да важи $\overrightarrow{v_2}=2\overrightarrow{v_1}$ и $\overrightarrow{v_3}=3\overrightarrow{v_1}$. С обзиром на то да међу векторима $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ и $\overrightarrow{v_4}$ постоје тачно два линеарно независна вектора ($\overrightarrow{v_1}$ и $\overrightarrow{v_4}$), следи да је ранг матрице A једнак 2.

2. Детерминанта матрице B једнака је $\det B = 3\,(b-4)$, одакле директно закључујемо да је ранг матрице B најмањи у случају када је $b=4$ и тада је $\operatorname{rang} B = 2$.
Приметимо да смо задатак могли да урадимо на сличан начин као претходни. Наиме, најмањи ранг матрице је у директној вези са пропорционалношћу међу њеним векторима врста (или векторима колона), а та пропорционалност постоји само у случају када је $b=4$. Конкретно, тада је $\overrightarrow{v_2}=2\cdot(2,2,3)=2\overrightarrow{v_1}$.

3.

(а) Матрица A је квадратна и реда n, па је њен максималан ранг управо једнак n и то је само у случају када је матрица A регуларна, односно када је $\det A \neq 0$. Ако је $\operatorname{rang} A < n$, аутоматски следи да је $\det A = 0$ (важи и обрат). С обзиром на то, као и на то да важи $\operatorname{rang} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{rang} A$, следи тачност тврђења под **(а)**.

(б) Имајући у виду дискусију под **(а)**, лако закључујемо да је ово тврђење такође тачно.

(в) Ранг матрице је једнак нули само када је та матрица једнака нула матрици. За сваку квадратну матрицу A важи $\det A^{\mathrm{T}} = \det A$. Из $\operatorname{rang} A = 0$ следи $A = \mathbb{O}_{n\times n}$, па самим тим и $\det A^{\mathrm{T}} = \det A = 0$.
Да бисмо се уверили да други смер тврђења под **(в)** не важи, довољно је уочити једну сингуларну ненула матрицу. Једна таква матрица је

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Лако се види да је $\det A^{\mathrm{T}} = \det A = 0$ и $\operatorname{rang} A = 1$. Следи, тврђење под **(в)** није тачно.

Дакле, тачна су тврђења под **(а)** и **(б)**.

4. Множењем елемената друге врсте са -2 и додавањем одговарајућим елементима прве врсте, добијамо

$$C=\begin{bmatrix} 2 & c & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & c-4 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

На основу тога закључујемо да је $\operatorname{rang} C = 2$ за свако $c \in \mathbb{R}$.

5.

(а) Уочимо матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$. Ранг обе матрице је једнак 1, па је $\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B = 2$. Како је $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, следи $\operatorname{rang}\,(A+B) = 0$. На основу тога закључујемо да тврђење под **(а)** није тачно.

(б) Замена места двема колонама матрице је једна од елементарних трансформација те матрице. Како елементарне трансформације не мењају ранг матрице, следи да је тврђење под **(б)** тачно.

(в) За произвољну матрицу C важи $\operatorname{rang}\,(5C) = \operatorname{rang} C$. Како једнакост $\operatorname{rang} C = 5\operatorname{rang} C$ важи само када је C једнака нула матрици, следи да тврђење под **(в)** није тачно.

Дакле, тачно је само тврђење под **(б)**.

6. Сопствене вредности матрице A су нуле карактеристичног полинома

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)[(4-\lambda)(6-\lambda)+1] = (1-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+24+1) = -(\lambda-1)(\lambda-5)^2.\end{aligned}$$

7. Карактеристични полином матрице A смо срачунали у претходном задатку, и он је једнак $\varphi_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-5)^2$. Минимални полином је монични полином најнижег степена који матрица A анулира. Минимални полином матрице A има исте факторе као и њен карактеристични полином, истог или нижег реда. Према томе, конкуренти за минимални полином матрице A су полиноми $\mu_1(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-5)$ и $\mu_2(\lambda) = -\varphi_A(\lambda)$. Како је

$$\mu_1(A) = (A-I_3)(A-5I_3) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix},$$

закључујемо да је $\mu_2(\lambda) = -\varphi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-5)^2$ минимални полином матрице A.

8. Збир сопствених вредности матрице једнак је њеном трагу. Траг матрице A једнак је $\operatorname{tr} A = 2a + a - 3 + 7 = 3a + 4$. Како је, према услову задатка, $\operatorname{tr} A = 10$, имамо да је $3a+4 = 10$, тј. $a = 2$.

9. Сопствене вредности матрице A су нуле карактеристичног полинома

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 & 0 \\ -4 & -2-\lambda & 0 \\ -b & 7 & b-\lambda \end{vmatrix} = (b-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (b-\lambda)[(6-\lambda)(-2-\lambda)+12] = (b-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-12+12) = -\lambda(\lambda-b)(\lambda-4).\end{aligned}$$

Према томе, за свако $b \in \mathbb{R}$ важи да је 4 сопствена вредност матрице A.

10. Једина сопствена вредност матрице A је $\lambda = 2$. Сопствени вектори матрице који одговарају сопственој вредности $\lambda = 2$ су нетривијална решења матричне једначине $A \cdot X = 2 \cdot X$, тј. једначине $(A - 2I_2) \cdot X = \mathbb{O}_{2\times 1}$, односно једначине

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Једноставно добијамо да је $x_2 = 0$ и да су сопствени вектори матрице A дати са $X = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

11. Из услова да је раван α нормална на вектор $\overrightarrow{BC} = (0,-1,0)$, закључујемо да је вектор нормале те равни, у ознаци $\overrightarrow{n_\alpha}$, колинеаран са вектором $\overrightarrow{BC}$. Без губитка општости, можемо узети да је $\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{BC} = (0,-1,0)$. С обзиром на то, као и на услов да раван α садржи тачку $A(1,-1,3)$, следи да је једначина равни α управо $y = -1$.

12.

(а) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \vec{a} \parallel \vec{b}$, па тврђење под **(а)** није тачно.

(б) $\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \vec{a} \perp \vec{b}$, па тврђење под **(б)** није тачно.

(в) Мешовити производ три вектора је једнак 0 ако су дати вектори линеарно зависни. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ су линеарно зависни, ако су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни. Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ је нормалан на раван која је паралелна векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Следи, тврђење под **(в)** није у општем случају тачно.

Дакле, ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно, па треба заокружити **(г)**.

13.

(а) $\vec{c} \circ \vec{d} = (1,2,3) \circ (-2,1,0) = 0.$

(б) Из $\vec{c} \circ \vec{d} = 0$, следи да је $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \pi/2$.

(в) $\vec{c} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-3,-6,5)\,.$

14. Вектор праве p је једнак вектору нормале равни β, односно $\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{n_\beta} = (2,0,3)$. С обзиром на то, закључујемо да је права p нормална на раван β.
Дакле, тачна тврђења су под **(а)** и **(в)**.

15.

(а) Ово тврђење је тачно, јер је вектор нормале равни yOz управо $(1,0,0)$.

(б) Ово тврђење није тачно, јер је тачно тврђење под **(а)**.

(в) Вектор правца осе Ox је $(1,0,0)$, што је управо и вектор нормале равни $x=0$ (то је управо раван yOz). Следи да је оса Ox нормална на раван $x=0$, па тврђење под **(в)** није тачно.

Дакле, тачно је само тврђење под **(а)**.